Zpřístupněním Eukleidových Základů v podobě, která je pro práci výrazně příjemnější a která se zároveň snaží zachovat historickou hodnotu tohoto díla, je edice Eukleidových Základů komentovaných Petrem Vopěnkou – viz Eukleides 2007, 2009, 2010, 2011. (V době psaní tohto článku byly vydány v příslušné edici knihy I – IV, V – VI, VII – IX a XI – XII, již se připravují další díly.)

Postřehy publikované v tomto článku vychází ze spolupráce autorky článku s P. Vopěnkou na vydání knih VII – IX.

Literatura

[1] *Bečvářová, M.*: *České překlady a čeští překladatelé Eukleidových Základů.* Přednáška z konference Eukleides: Základy geometrie. Plzeň, 2008. Dostupné on-line: http://www.kfi.zcu.cz/akce/2008/eukleides/becvarova.pdf [cit. 2. 2. 2012]

[2] *Euklides*: Základy. Knihy I – IV komentované Petrem Vopěnkou. Nymburk : OPS, 2007.

[3] *Euklides*: Základy. Knihy V – VI komentované Petrem Vopěnkou. Nymburk : OPS, 2009.

[4] *Euklides*: Základy. Knihy VII – IX komentované Petrem Vopěnkou. Kanina : OPS, 2010.

[5] *Euklides*: Základy. Knihy XI – XII komentované Petrem Vopěnkou. Kanina : OPS, 2011.

Grantová podpora

Článek vznikl za podpory grantu GAUK č. 303511.

O jedné vlastnosti permutací

MARTIN BROUŠEK

posluchač Přírodovědecké fakulty UP, Olomouc

Při studiu permutací se můžeme seznámit s mnoha zajímavými vlastnostmi, ale jen zřídka narazíme na zmínku o komutativnosti jejich skládání. Pokud se s touto speciální vlastností však setkáme, stává se to v souvislosti s tzv. *disjunktními* permutacemi. Cílem tohoto příspěvku je poskytnout čtenářům informaci o počtu permutací, které jsou s danou permutací komutativní. V závěru článek porovnává na příkladu počet disjunktních a všech komutativních permutací.

Uveďme nejprve některé důležité pojmy a definice. Symbolem $|M|$ značíme počet prvků konečné množiny M. *Pevným bodem* permutace φ neprázdné konečné množiny M rozumíme každý prvek $a \in M$, pro který platí $\varphi(a) = a$. *Složením* permutací φ a ψ rozumíme takovou permutaci $\varphi \circ \psi$, kde pro každý prvek a z množiny M platí $(\varphi \circ \psi)(a)=\varphi(\psi(a))$.

Definice 1

Permutace φ,ψ prvků neprázdné konečné množiny M nazveme navzájem *disjunktní*, právě když pro množiny M_φ, M_ψ jejich pevných bodů platí

$$M_\varphi \cup M_\psi = M.$$

Skládání takových dvojic disjunktních permutací je, jak známo, přitom komutativní. Snadný důkaz tohoto tvrzení nalezneme např. v publikacích [1] nebo [2]. Tuto skutečnost si můžeme ukázat na příkladu:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 1\,3\,5\,2\,4\,6\,7\,8 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 1\,2\,3\,4\,5\,7\,8\,6 \end{pmatrix}$$

Obě permutace jsou evidentně disjunktní, přičemž jejich komutativnost lze snadno ověřit:

$$\varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 1\,3\,5\,2\,4\,7\,8\,6 \end{pmatrix} = \psi \circ \varphi$$

Za pozornost však rovněž stojí permutace, které s danou permutací φ disjunktní nejsou, a přitom jejich složení s φ je komutativní. Např. pro výše uvedenou permutaci φ a permutaci ϱ

$$\varrho = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 6\,5\,4\,3\,2\,8\,7\,1 \end{pmatrix}$$

platí

$$\varphi \circ \varrho = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 6\,4\,2\,5\,3\,8\,7\,1 \end{pmatrix} = \varrho \circ \varphi\,.$$

Definice 2

Nechť je dána permutace φ n-prvkové množiny M. Pro každé $a \in M$ nazýváme posloupnost

$$a,\, \varphi(a),\, \varphi^2(a),\, \varphi^3(a), \ldots$$

orbitou prvku a v permutaci φ. Množinu všech navzájem různých prvků této posloupnosti značíme O_i, kde $1 \leq i \leq n$.

Poznámka. Pro zjednodušení budeme často pojem orbita používat také pro množinu navzájem různých prvků této orbity a pro obojí budeme používat označení O_i.

Při podrobnějším studiu se zde naskýtá zajímavá otázka: Kolik existuje permutací ψ vzhledem k dané n-prvkové permutaci φ, jejichž složení permutací φ je komutativní? Na tuto otázku dává odpověď následující věta.

Věta

Nechť φ je permutace k-prvkové množiny M. Pak pro počet S všech permutací ψ, které jsou s φ navzájem komutativní, platí:

$$S = (1^{d_1} d_1!)(2^{d_2} d_2!) \ldots (k^{d_k} d_k!) = \prod_{p=1}^{k} p^{d_p} d_p!,$$

kde k je počet prvků permutace φ a d_p je počet všech orbit s právě p prvky.

Důkaz. Uvažujme permutaci φ složenou z orbit $O_r\,(r = 1, 2, \ldots, s)$. Uvažujme některé dvě orbity O_x a O_y ($|O_x| = n$, $|O_y| = m$, kde platí $m \leq n$). Označme dále x_i ($i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$) prvky orbity O_x a y_j ($j = 1,\, 2,\, \ldots,\, m$) prvky O_y tak, že

$$\varphi(x_1) = x_2,\, \varphi(x_2) = x_3,\, \ldots,\, \varphi(x_n) = x_1$$

a

$$\varphi(y_1) = y_2,\, \varphi(y_2) = y_3,\, \ldots,\, \varphi(y_m) = y_1.$$

Hledáme-li ψ tak, aby platilo $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, pak pro naše potřeby rozlišíme dva případy:

$$\psi(x_i) \notin O_x \quad \text{nebo} \quad \psi(x_i) \in O_x\,.$$

Zabývejme se nejprve důsledky první možnosti. Nechť např. $\psi(x_1) = y_1$. Tedy

$$(\varphi \circ \psi)(x_1) = \varphi(\psi(x_1)) = \varphi(y_1) = y_2$$

a mají-li být permutace φ a ψ komutativní, pak

$$y_2 = (\psi \circ \varphi)(x_1) = \psi(\varphi(x_1)) = \psi(x_2).$$

Stejně pak

$$\psi(x_3) = y_3,\ \psi(x_4) = y_4,\ \ldots,\ \psi(x_m) = y_m,$$

dále však $\psi(x_{m+1}) = y_1$ toto je ale možné pouze v případě, že $m = n$ $(x_{m+1} \sim x_1)$.

Má-li tedy permutace ψ zobrazit prvek některé orbity na prvek jiné orbity, musí mít tyto orbity stejný počet prvků a také všechny zbývající prvky první orbity se musí zobrazit do téže orbity a toto zobrazení je jednoznačně určeno zobrazením zvoleného prvku.

Podobně lze postupovat i v druhém případě; nechť např. $\psi(x_1) = x_3$. Platí tedy

$$(\varphi \circ \psi)(x_1) = \varphi(\psi(x_1)) = \varphi(x_3) = x_4.$$

Pokud ale platí $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, pak

$$x_4 = (\psi \circ \varphi)(x_1) = \psi(\varphi(x_1)) = \psi(x_2),$$

tedy $\psi(x_2) = x_4$, stejně tak

$$\psi(x_3) = a_5,\ \psi(x_4) = x_6,\ \ldots,\ \psi(x_{n-1}) = x_1,\ \psi(x_n) = a_2.$$

Zobrazí-li permutace ψ některý prvek orbity O_x na prvek téže orbity, musí analogicky zobrazit i všechny zbývající prvky orbity O_x a toto zobrazení je dáno jednoznačně zobrazením zvoleného prvku.

Je-li tedy dána permutace φ a chceme určit počet S všech různých permutací ψ takových, že $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, rozložme nejprve orbity permutace φ do skupin podle počtu jejich prvků. Z předchozích poznatků víme, že žádná taková permutace ψ nemůže prvek jedné skupiny zobrazit na prvek skupiny jiné a musí jej tedy zobrazit na některý z prvků výchozí skupiny. A navíc se vždy celá orbita zobrazí na celou orbitu a jednoznačnost tohoto zobrazení je zajištěna zobrazením jediného prvku.

Uvažujme tedy skupinu obsahující všechny orbity s právě p prvky a označme d_p počet těchto orbit. Existuje tak $d_p!$ možností, jak se mohou tyto orbity na sebe vzájemně zobrazit, a přitom každá z d_p orbit se může na jinou zobrazit právě p způsoby. Proto pro tuto skupinu existuje $p^{d_p} d_p!$ možností, a to nezávisle na všech ostatních skupinách. Užitím principu součinu pro všechna možná p tak dostáváme celkový počet všech možných permutací ψ. Platí tedy

$$S = (1^{d_1} d_1!)(2^{d_2} d_2!) \dots (k^{d_k} d_k!) = \prod_{p=1}^{k} p^{d_p} d_p!$$

Tím je důkaz ukončen.

K procvičení a objasnění dané problematiky uvádíme nasledující příklad.

Příklad

Je dána permutace

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 1\,4\,2\,3\,6\,7\,5\,8 \end{pmatrix}.$$

Určete počet všech disjunktních, resp. komutativních permutací k permutaci φ.

[Počet disjunktních permutací je 2; počet komutativních permutací je 36]

Poznámka. Počet P disjunktních permutací je zřejmě $P = d_1!$, kde d_1 je počet pevných bodů dané permutace.

Z uvedeného příkladu je patrné, že disjunktní permutace tvoří jen zlomek všech komutativních permutací a je také zřejmé, že jedinou permutací, pro niž je počet disjunktních roven počtu komutativních permutací, je permutace identická, neboť právě pro ni platí, že všechny její orbity jsou délky 1, tj. všechny prvky jsou pevnými body této permutace.

Literatura

[1] *Mladenović, P.*: Kombinatorika (Materijali za mlade matematičare, sv. 22). Beograd, 1992.

[2] *Riordan, J.*: An Introduction to Combinatorial Analysis. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958.

[3] *Švrček, J.*: Úvod do kombinatoriky. Vydavatelství UP Olomouc, 2008.